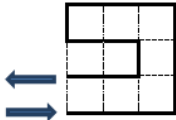


Вариант 3

1. Найдите какое-нибудь натуральное число, сумма всех делителей которого (включая 1 и само это число) равна 512.
2. Решите уравнение $(x^2 - 3x + 7)(x^2 + x + 5) = 43$.
3. Докажите, что для любого треугольника с длинами сторон a, b, c и углами α, β, γ (α напротив стороны a , β – напротив b , γ – напротив c) выполняются равенства $a^2 + b^2 - 2ab \cos(60^\circ + \gamma) = b^2 + c^2 - 2bc \cos(60^\circ + \alpha) = a^2 + c^2 - 2ac \cos(60^\circ + \beta)$.
4. Две частицы находятся в вершинах правильного 2016-угольника. В начальный момент первая частица находится на расстоянии 35 сторон по часовой стрелке от второй. Затем одновременно они начинают совершать прыжки: вторая – против часовой стрелки через 20 сторон, а первая – по часовой стрелке через 29 сторон. Попадут ли они одновременно в одну вершину и если да, то через сколько прыжков?
5. На плоскости изображён квадрат $n \times n$ клеток. Вершины клеток будем называть узлами. Требуется в этом квадрате уложить трубу (“тёплый пол”) так, чтобы вход был в левом нижнем углу, а выход – в соседнем узле, и при этом труба прошла бы ровно один раз через каждый узел. Трубу разрешается укладывать только по границам клеток. На рисунке изображён пример укладки трубы в квадрате 3×3 . Докажите, что уложить трубу возможно при любом нечётном значении n и невозможно ни при каком чётном n .
 
6. Первый спортсмен начинает движение из пункта А в пункт В. Одновременно с ним, держа в руке эстафетную палочку, из пункта В стартует второй спортсмен и совершает челночный бег между пунктами А и В со скоростью, в 10 раз большей, чем скорость первого спортсмена (т.е., добежав до А, второй спортсмен тут же разворачивается и бежит в В, оттуда снова в А и т.д.). При каждой встрече спортсмен, владеющий эстафетной палочкой, передает ее другому спортсмену. Найти путь, который будет проделан эстафетной палочкой к тому моменту, когда первый спортсмен окажется в пункте В, если расстояние между пунктами А и В равно S.
7. Пусть x – действительное число. Обозначим символом $\|x\|$ расстояние на числовой прямой от x до ближайшего целого числа. (Например, $\|3,7\| = 0,3$.) Докажите, что найдётся натуральное число k такое, что 1) $k \leq 999$ и 2) $\|k \cdot \sqrt{5}\| < \frac{1}{1000}$.
8. Найдите все пары натуральных чисел (x, y) , удовлетворяющих равенству:

$$x^2 + y^2 = 50000.$$